

Über den Ionisationszustand und die Ausstrahlung von Fremdgasen in einem Wasserstoffplasma

Von G. KNORR

Aus dem Max-Planck-Institut für Physik, Göttingen
(Z. Naturforsch. 13 a, 941—950 [1958]; eingegangen am 8. August 1958)

An interpolation formula for ionization (and excitation) of ions is proposed, which holds for the whole energy range of the colliding electrons. With the aid of this formula a time constant is computed and discussed characterizing the time scale with which the ionization equilibrium of heavier ions is established. ELWERT's ionization formula is generalized for small parameters $s = \chi_n/kT$ (χ_n = ionization energy). The radiation of impurities namely free—free, free—bound, and excitation radiation are computed and discussed for such a plasma. The interaction of the radiation with the plasma is neglected.

Bei den Bemühungen um die thermonukleare Fusion unter quasi-stationären Verhältnissen spielt der Energieverlust des Plasmas durch Ausstrahlung eine wichtige Rolle^{1, 2}. Die Strahlung für ein reines, nichtrelativistisches Wasserstoffplasma ohne Berücksichtigung der Elektron—Elektronenstrahlung ist von verschiedenen Autoren berechnet worden^{3—5}. In der Praxis hat man es aber nie mit einem reinen Wasserstoffplasma zu tun, sondern diesem sind stets mehr oder weniger starke Verunreinigungen durch schwerere Atome beigemengt, verursacht durch mangelnde Reinheit des Wasserstoffgases, Restgase im Vakuum und Gaseruptionen aus den Wänden während des Versuchs. Die Verunreinigungen werden auch absichtlich zugefügt, um aus dem Studium der Strahlung Aufschluß über die Temperatur des Plasmas zu erhalten.

Der erste Teil dieser Arbeit möchte einen Beitrag liefern zu der Frage, inwieweit aus dem Ionisationsgrad und der Strahlung der Verunreinigungen auf die Elektronen-Temperatur des Plasmas geschlossen werden kann, insbesondere kurz nach einem Aufheizen des Plasmas. Der zweite Teil beschäftigt sich mit dem Strahlungsenergieverlust durch diese Verunreinigungen.

1. Einstellung des stationären Gleichgewichts in einem Plasma

Bei der Berechnung der Ausstrahlung gehen die Wirkungsquerschnitte für Stoßionisation und Anregung entscheidend ein. Um den Verlauf der Quer-

schnitte zu charakterisieren, unterscheidet man zweckmäßigerweise 2 Energiebereiche des stoßenden Elektrons: im ersten ist die Energie E nur wenig größer als die Ionisierungsenergie χ , und der Querschnitt steigt von dem Wert 0 bei $E = \chi$ steil zu einem Maximum beim 3—4-fachen der Ionisationsenergie auf, um dann, weniger steil, wieder abzufallen. Im zweiten Bereich, bei großen Energien, verhält sich der Querschnitt proportional $\ln U/U$, wobei $U = E/\chi$.

Die theoretischen und experimentellen Werte im ersten Bereich hat ELWERT⁶ kritisch gesichtet und ausgewertet. Er fand, daß man die Daten, unter denen sich so weit auseinanderliegende wie die Ionisation der K-Schale des Hg und von H₂ und He befinden, in einem Diagramm mit relativ geringer Streuung darstellen kann, wenn man den durch $\pi a_0^2 (\chi_H/\chi_n)^2 \zeta = q_0$ geteilten Wirkungsquerschnitt q gegen die reduzierte Elektronenenergie $U = E/\chi_n$ aufträgt. (a_0 = Elektronenbahnradius des Wasserstoffs, χ_H , χ_n = Ionisationsenergie für Wasserstoff bzw. das betrachtete Ion, ζ = Anzahl der Elektronen in der äußeren Schale.) ELWERT gibt als Interpolationsformel für diese Daten

$$q_{\text{red}} = \frac{q}{\pi a_0^2 \zeta (\chi_H/\chi_n)^2} = c_2 \frac{U-1}{U^2} [1 + c_3(U-1)] \quad (1)$$

mit $c_2 = 2$; $c_3 = 0,3$. Diese Kurve hat die Steigung c_2 im Punkte $U = 1$ und den asymptotischen Wert

$$q_{\text{red}} = c_2 \cdot c_3 \quad \text{für } U \rightarrow \infty.$$

Solange nur stationäre Gleichgewichtszustände in dem für die Astrophysik wichtigen Temperatur-

¹ R. F. Post, Rev. Mod. Phys. 28, 328 [1956].

² L. BIERMANN u. A. SCHLÜTER, Z. Naturforsch. 12 a, 805 [1957].

³ C. G. CILLIÉ, Mon. Not. Roy. Astr. Soc. 92, 820 [1932].

⁴ W. B. THOMPSON, AERE T/M 73 [1957].

⁵ G. HETTNER, Z. Phys. 150, 182 [1958].

⁶ G. ELWERT, Z. Naturforsch. 7 a, 432 [1952].



Dieses Werk wurde im Jahr 2013 vom Verlag Zeitschrift für Naturforschung in Zusammenarbeit mit der Max-Planck-Gesellschaft zur Förderung der Wissenschaften e.V. digitalisiert und unter folgender Lizenz veröffentlicht: Creative Commons Namensnennung-Keine Bearbeitung 3.0 Deutschland Lizenz.

Zum 01.01.2015 ist eine Anpassung der Lizenzbedingungen (Entfall der Creative Commons Lizenzbedingung „Keine Bearbeitung“) beabsichtigt, um eine Nachnutzung auch im Rahmen zukünftiger wissenschaftlicher Nutzungsformen zu ermöglichen.

This work has been digitized and published in 2013 by Verlag Zeitschrift für Naturforschung in cooperation with the Max Planck Society for the Advancement of Science under a Creative Commons Attribution-NoDerivs 3.0 Germany License.

On 01.01.2015 it is planned to change the License Conditions (the removal of the Creative Commons License condition "no derivative works"). This is to allow reuse in the area of future scientific usage.

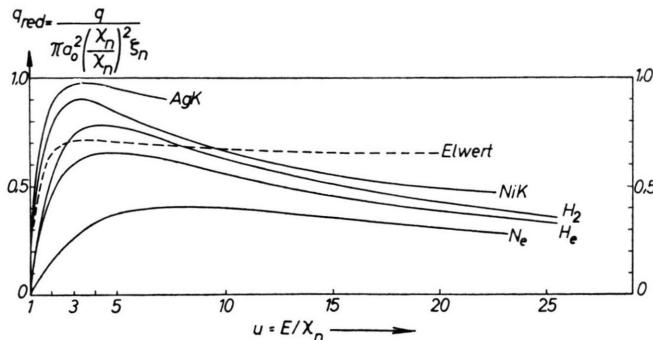


Abb. 1. Ionisationsquerschnitte einiger Elemente und Gase in Abhängigkeit von der Energie des stoßenden Elektrons.

bereich um 10^6 Grad betrachtet werden, ist diese Interpolationsformel, die nur den Bereich in der Nähe der Ionisierungsenergie befriedigend wiedergibt, vollkommen ausreichend; denn bei diesen Temperaturen ist das Verhältnis

$$\chi_n/kT > 1,$$

d. h. bei einer MAXWELL-Verteilung tragen nur relativ wenige energiereiche Elektronen zur Ionisation bei, und ihre Anzahl nimmt mit steigender Energie rasch ab. Deshalb ist es ziemlich gleichgültig, ob die Interpolationsformel das Verhalten des Wirkungsquerschnittes für große U richtig wiedergibt.

Ganz anders verhält es sich jedoch bei der Behandlung instationärer Zustände oder bei sehr viel höheren Temperaturen, da hier χ_n/kT keineswegs mehr größer 1 zu sein braucht. Infolgedessen kann der Wirkungsquerschnitt für große U wesentlich eingehen. Da wir nichtstationäre Vorgänge abschätzen wollen, ist eine Interpolationsformel, die sich für alle Energien dem Verlauf der Wirkungsquerschnitte gut anpaßt, erstrebenswert.

In Abb. 1 sind einige der experimentell ermittelten Kurven wiedergegeben. Theoretisch wurde der Ionisationsquerschnitt schon 1930 von BETHE⁷ berechnet. Er erhielt

$$q_{\text{red}} = b_{nl} \frac{\ln(4U/B_{nl})}{U}$$

ein Ergebnis, das seiner Ableitung nach nur für große U gilt. Für $U=1$ muß q verschwinden. In Annäherung an diese Formel haben WEBSTER, HANSEN und DUVENECK⁸ und POCHMANN, WEBSTER und HARWORTH⁹ ihre Messungen an der Ag- bzw. Ni K-Schale durch die 2-parametrische Formel

$$q_{\text{red}} = A \frac{\ln U}{U^m}$$

⁷ H. BETHE, Ann. Phys., Lpz. 5, 325 [1930].

⁸ D. L. WEBSTER, W. W. HANSEN u. F. B. DUVENECK, Phys. Rev. 43, 839 [1933].

gut wiedergegeben. Die Werte der Parameter sind in Tab. 1 wiedergegeben.

	m	A
Ni	0,837	2,78
Ag	0,783	2,10

Tab. 1.

Die Anpassung dieser Formel an die anderen in Abb. 1 abgebildeten Kurven ist wesentlich schlechter. So läßt sich die Kurve für He zwar durch $m=1,02$; $A=2,32$ für $U>10$ gut anpassen, die Werte für $U<10$ sind dann jedoch zu groß.

Eine andere Interpolationsformel für die Darstellung der Ionisationsquerschnitte hat FABRE DE LA RIPELLE¹⁰ vorgeschlagen und gezeigt, daß die vorliegenden experimentellen Daten durch sie gut wiedergegeben werden. Sie lautet:

$$q_{\text{red}} = \frac{4}{k} \frac{\ln \lambda U}{U + \varphi}. \quad (2)$$

λ kann in der überwiegenden Anzahl der Fälle gleich 1 gesetzt werden. φ bestimmt die Lage des Maximums, k den Ordinatenmaßstab. Tab. 2 gibt für eine Reihe von Elementen und Gasen die Darstellung der experimentellen Ergebnisse durch die Parameterwerte φ , k und λ .

Bei den Gasen beziehen sich die Werte auf einfache Ionisation eines Elektrons der äußeren Schale, bei Nickel, Silber, Gold auf die Ionisation der K- bzw. der L_{II}- oder L_{III}-Schale, was in der 2. Spalte vermerkt ist. Bei manchen Substanzen fehlt die Angabe des Parameters k ; Hier liegen in der Literatur nur Relativmessungen des Querschnitts vor. Der Parameter λ ist bei allen Substanzen gleich 1, mit Ausnahme von Neon. Setzt man auch hier $\lambda=1$,

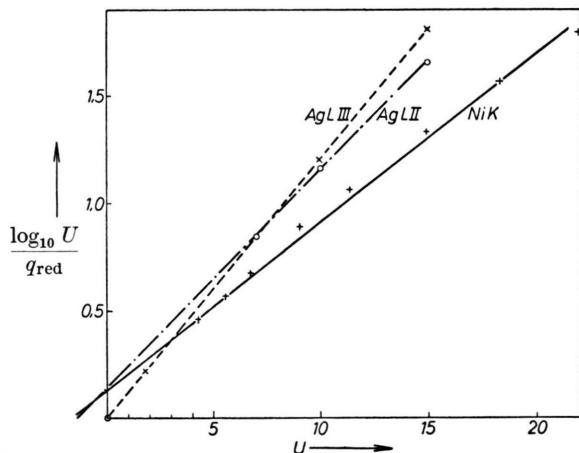
⁹ L. T. POCHMAN, D. L. WEBSTER, D. KIRKPATRICK u. K. HARWORTH, Phys. Rev. 71, 330 [1947].

¹⁰ FABRE DE LA RIPELLE, J. Phys. Radium 10, 318 [1949].

Z	Substanz	φ	k	λ
2	He	2,03	1,47	1
10	Ne	1,90	1,48	1,53
10	(Ne)	(1,53)	(1,06)	(1)
18	A	2,9	1,39	1
36	Kr	3,08	—	1
54	Xe	2,90	—	1
	H_2	1,59	1,42	1
11	Na	0,07	—	1
28	Ni K	1,1	1,13	1
47	Ag K	1,25	1,04	1
79	Au L _{II}	1,45	—	1
79	Au L _{III}	0	—	1
ELWERTSche Kurve		0	2,13	1

Tab. 2.

so ergibt sich mit den eingeklammerten Werten eine gute Interpolation für $U > 10$. Für $U < 10$ liegt die Kurve zu hoch. Wählt man $\varphi = 0$, $k = 2,13$, so fällt die Kurve im Bereich $1 < U < 2$ mit der ELWERTSchen Interpolationskurve praktisch zusammen. In Abb. 2 ist die Bestimmung der Parameter durchgeführt für Ni K, Au L_{II} und Au L_{III}. Da für die beiden letzten Querschnitte jeweils nur drei Werte zur Verfügung standen, die eine Gerade bestimmen sollen, sind diese Ergebnisse nicht sehr sicher. Die Parameter variieren in relativ kleinen Bereichen. Bei den folgenden Überlegungen soll ein Querschnitt der Gestalt (2) mit passend gewählten Parametern angenommen werden.

Abb. 2. Interpolation der Ionisationsquerschnitte von Ni K, Ag L_{II} und Ag L_{III} durch $q_{\text{red}} = \frac{4}{k} \frac{\ln U}{U + \varphi}$.

Die Zahl der Ionisation pro Sekunde erhält man durch Mittelung des Ionisationsquerschnitts über die Energieverteilung der Elektronen:

$$Z = n_i n_e \int_{E=\chi}^{\infty} q(E) f(E) v dE$$

(v = Geschwindigkeit der Elektronen; n_i , n_e = Zahl der Ionen, Elektronen pro cm^3). Mit der MAXWELL-Verteilung

$$f(E) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \frac{1}{(k T)^{3/2}} e^{-E/kT} \sqrt{E} dE$$

und (2) ergibt sich:

$$Z = n_i n_e (\alpha \pi a_0^2 c \zeta) \frac{8}{\sqrt{\pi k}} \left(\frac{\chi_H}{k T} \right)^{3/2} \int_1^{\infty} \frac{\ln U}{U + \varphi} e^{-sU} U dU$$

mit $s = \chi_H/kT$ (α = Feinstrukturkonstante, c = Lichtgeschwindigkeit). Auswertung des Integrals ergibt

$$Z = n_i n_e (\alpha \pi a_0^2 c \zeta) \frac{4}{\sqrt{\pi k}} \left(\frac{\chi_H}{\chi_n} \right)^{3/2} e^{-s} G(s, \varphi). \quad (3)$$

Der Faktor $G(s, \varphi)$ steht für

$$2 s^{3/2} e^s \int_1^{\infty} \frac{\ln U}{U + \varphi} e^{-sU} U dU = s^{-1/2} \left\{ 2 [s e^s \text{Ei}(s)] - \frac{e^{-s(\varphi-1)}}{\varphi} [\varphi s e^{\varphi s} \text{Ei}(\varphi s)]^2 \right. \\ \left. - \frac{2 s \varphi \ln \varphi}{1 + \varphi} [s(1 + \varphi) e^{s(1 + \varphi)} \cdot \text{Ei}((1 + \varphi)s)] + 2 s^2 \varphi e^{s(\varphi+1)} \int_{1/\varphi}^1 \frac{\ln(1/y)}{1+y} e^{-\varphi s(y+1)} dy \right\},$$

wobei $\text{Ei}(s) = \int_s^{\infty} \frac{e^{-x}}{x} dx$.

Die in den eckigen Klammern stehenden Ausdrücke ergeben 1, wenn s groß wird.

Für die Werte 0 und 1 von φ wird G besonders

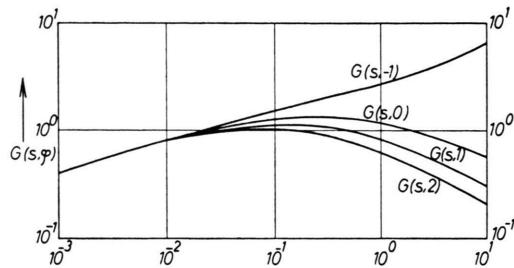
einfach:

$$\sqrt{s} G(s, 0) = 2 s e^s \text{Ei}(s);$$

$$\sqrt{s} G(\infty, 0) = 2; \quad \sqrt{s} G(\infty, 1) = 1;$$

$$\sqrt{s} G(s, 1) = 2 s e^s \text{Ei}(s) - [s e^s \text{Ei}(s)]^2.$$

Den Verlauf von $G(s, \varphi)$ für $\varphi = 0, 1, 2$ zeigt Abb. 3.

Abb. 3. Die Funktion $G(s, \varphi)$ für $\varphi = -1, 0, 1, 2$.

Der Kehrwert von Z stellt mit $n_i = 1$ die mittlere Zeit zwischen 2 Stoßionisationen dar und ist damit ein Maß für die Zeitskala, während der sich ein Gleichgewicht einstellt. Mit $k = 1,4$ und $\varphi = 1$ erhalten wir:

$$\tau = \frac{1}{Z} \quad (4)$$

$$= 0,646 \cdot 10^{-3} (k T e V)^{3/2} s^{3/2} e^s G^{-1}(s, 1) \frac{1}{\zeta} \frac{10^{15}}{n_e}.$$

Zeichnet man die Kurve $s^{3/2} e^s G^{-1}(s, 1)$, so erhält man hieraus durch Parallelverschiebung eine Kurvenschar, die τ in Abhängigkeit von χ_n mit kT als Parameter liefert und die in Abb. 4 für $n_e = 10^{15} \text{ cm}^{-3}$ und $\zeta = 1$ gezeichnet ist. Die gestrichelte Kurve a-b entspricht mittleren χ_n/kT -Werten, die sich einstellen, wenn sich das Plasma im Gleichgewicht befindet¹¹. χ_n ist hier die Ionisationsenergie der mit maximaler Häufigkeit vertretenen Ionen.

Bevor die Einstellung des Gleichgewichts an einem praktischen Beispiel diskutiert wird, soll auf den Ionisationszustand im Gleichgewicht eingegangen werden. Durch das Gleichsetzen der Zahl der Stoßionisationen und der Strahlungsrekombinationen entsteht eine Ionisationsformel, die von MIYAMOTO¹², BIERMANN¹³ sowie von WOOLLEY und ALLEN¹⁴ vorgeschlagen und von ELWERT⁶ ausführlich diskutiert worden ist. Nach ELWERT lautet diese:

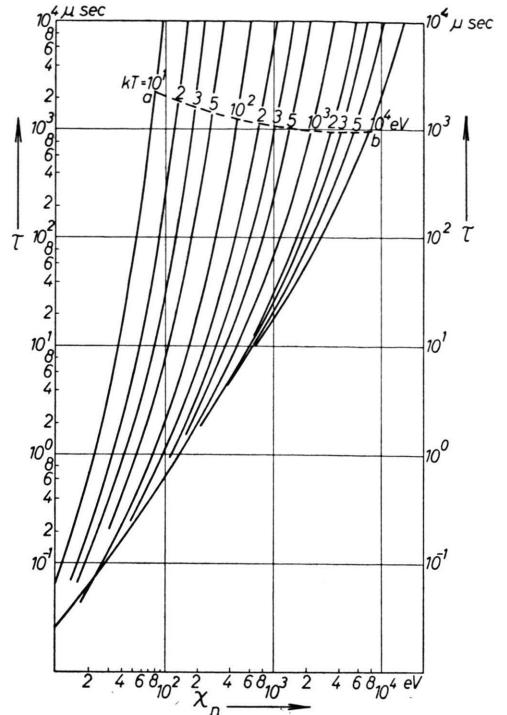
$$\frac{n_{i+1}}{n_i} = \frac{3\sqrt{3}}{16\alpha^3} \frac{5}{4} \frac{\zeta_n}{g n_0} \left(\frac{\chi_H}{\chi_n} \right)^2 \frac{e^{-s}}{s} = 1,04 \frac{\zeta_n}{g n_0} \left(\frac{\chi_H}{\chi_n} \right)^2 \frac{e^{-s}}{s} \quad (5)$$

n_i = Zahl der i -fach ionisierten Atome, g ist eine langsam veränderliche Funktion von $(s n_0)^2$ der Größenordnung 1.

Verwendet man bei der Ableitung von (5) statt des ELWERTSchen Ionisationsquerschnittes den von Gl. (2), so ergibt sich

$$\frac{n_{i+1}}{n_i} = \frac{3\sqrt{3}}{16\alpha^3} \frac{5}{4} \frac{\zeta_n}{g n_0} \left(\frac{\chi_H}{\chi_n} \right)^2 \frac{e^{-s}}{s} \left[\frac{4}{5} \frac{1}{f_1 k} \frac{G(s, \varphi)}{\sqrt{s} e^s \text{Ei}(s)} \right] \quad (6)$$

(f_1 = Korrekturfaktor in der Nähe von 1).

Abb. 4. Relaxationszeit τ für das Ionisationsgleichgewicht in einem Plasma in Abhängigkeit von der Ionisationsenergie χ_n und der Elektronentemperatur T .

$$\tau = 0,646 \cdot 10^{-3} (k T \text{ eV})^{3/2} s^{3/2} e^s G^{-1}(s, 1) \text{ } \mu\text{sec},$$

$n_e = 10^{15} \text{ cm}^{-3}$. — Die Kurve a-b entspricht dem Gleichgewichtszustand des betreffenden Ions im Plasma.

Gl. (6) stimmt im Gebiet $1 < s < 7$, das ist gerade der astrophysikalisch interessante Bereich mit (5) sehr genau überein für $\varphi = 0$ und $f_1 k = 1,64$ und mit geringen Abweichungen am Rande des Gebietes für $\varphi = 1$, $f_1 k = 1$. Gl. (6) hat gegenüber Gl. (5) jedoch den Vorteil, daß sie für beliebig hohe Temperaturen gilt, was an späterer Stelle noch verwendet werden wird.

Um die am meisten vertretenen Ionisationszustände in Abhängigkeit von der Temperatur zu ermitteln, setzt ELWERT $n_{i+1}/n_i = 1$ und erhält aus (5)

$$\chi_n = \sqrt{b} \frac{0,96 \cdot 10^4}{s e^{s/2}} \text{ eV}; \quad \text{mit } b = \frac{2 \zeta_n}{g n_0};$$

setzt man $b = 1$, so erhält man einen Zusammenhang zwischen mittlerer Ionisationsenergie und Temperatur, der in Abb. 5 noch einmal wiedergegeben ist.

¹¹ G. ELWERT, Z. Astrophys. **41**, 67 [1956].

¹² S. MIYAMOTO, Acta Astr. Cosmophys. **2**, 29 [1943].

¹³ L. BIERMANN, Naturwiss. **34**, 87 [1947].

¹⁴ R. v. d. R. WOOLLEY u. C. W. ALLEN, Mon. Not. Roy. Astr. Soc. **108**, 292 [1948].

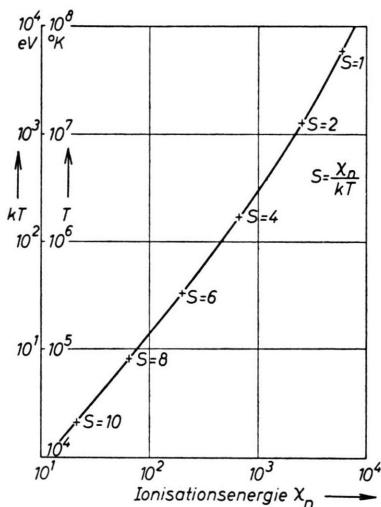


Abb. 5. Temperatur eines Plasmas in Abhängigkeit von der Ionisationsenergie von Ionen, deren Ionisationszustand sich im Gleichgewicht mit der Elektronentemperatur befindet.

Für genauere Untersuchungen, z. B. eines bestimmten Elements, ist diese Kurve nicht mehr hinreichend, da die Elektronenzahl ζ_n , z. B. in der L-Schale zwischen 1 und 8, variieren kann und damit b beträchtlich verändert. Man erhält aber aus der einen Kurve für $b = 1$ in doppelt-logarithmischer Darstellung leicht alle anderen Kurven für beliebiges b durch Parallelverschiebung um \sqrt{b} längs der Abszisse und Ordinate; ein Verfahren, welches viel Rechenarbeit spart.

Eine Anwendung der Gl. (5) zeigt Abb. 6. Es wurde für Sauerstoff die Häufigkeit der verschiedenen Ionisationsstufen für die Temperaturen 20, 50, 100, 200 und 500 eV aufgetragen. Man sieht, daß bei der Temperatur 20 eV O_{VI} am häufigsten vertreten ist, bei $kT = 50$ und 100 eV dagegen O_{VII}. Der Temperatursprung von 50 auf 100 eV ändert relativ wenig an der Verteilung, da das Ionisationspotential für die K-Schale viel größer ist als die

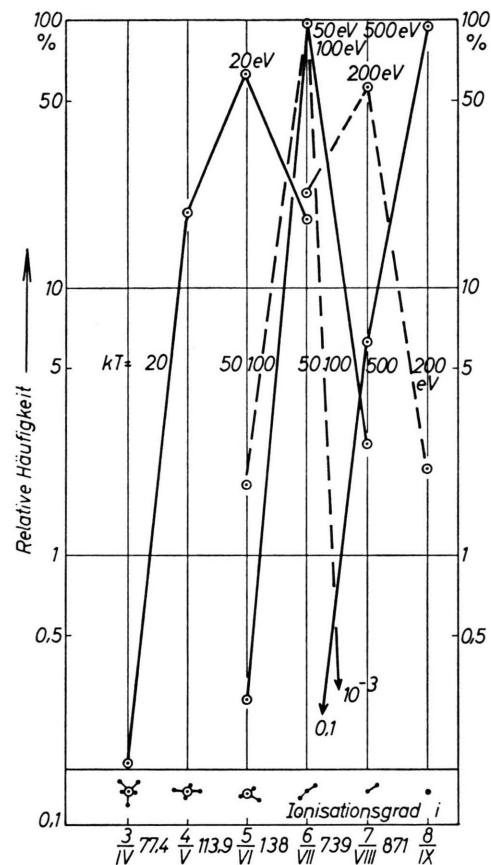


Abb. 6. Konzentration der verschiedenen Ionisationsstufen für Sauerstoff in Abhängigkeit von der Plasmatemperatur.

vorhergehenden. Erst bei $kT = 200$ eV wird die K-Schale merklich aufgebrochen und bei 500 eV endlich sind 94% der Atome vollständig ionisiert.

Aus Abb. 4 entnehmen wir für $n_e = 10^{14} \text{ cm}^{-3}$ und die Temperaturen 50, 100 und 200 eV unter Berücksichtigung der Elektronenzahl, die in Tab. 3 zusammengestellten Relaxationszeiten (in μsec), für die verschiedenen Ionisationszustände von Sauerstoff:

Ionisations-Zustand	III	IV	V	VI	VII	VIII
$\chi_n \text{ eV} =$	47,4	77,4	113,9	138	739	871
kT	50	2	10	75	300	—
eV	100	1	3	15	50	$300 \cdot 10^3$
	200	0,5	2	7,5	30	$10 \cdot 10^3$
						$40 \cdot 10^3$

Tab. 3. Relaxationszeiten in μsec für die verschiedenen Ionisationszustände von Sauerstoff bei verschiedenen Temperaturen.

Der Vergleich dieser Daten mit den von THONEMANN et al.¹⁵ gemachten Experimenten zeigt keine Übereinstimmung. Für den *Zeta-Pinch* werden eine Elektronendichte von $n_e = 10^{14} \text{ cm}^{-3}$ und eine aus DOPPLER-Verbreiterung der O_V-Linien und der Neutronenausbeute errechnete Ionentemperatur von $1 - 4 \cdot 10^6 \text{ }^\circ\text{K}$ (100 – 400 eV) angegeben. Würde man annehmen, daß die Elektronentemperatur nicht niedriger als die Ionentemperatur ist, so würde hieraus folgen, daß bei $1 \cdot 10^6 \text{ }^\circ\text{K}$ im stationären Zustand überhaupt keine O_V-Linien mehr vorhanden sein dürften, da die Konzentration dieses Zustandes von der Größenordnung 10^{-6} ist. Auch O_{VI} ist nur in der Konzentration $3 \cdot 10^{-3}$ vorhanden (Abb. 6). Es wird jedoch die Aufzeichnung von starken O_{VI}-Linien erwähnt. Auch die Überlegung, daß es sich um keinen Gleichgewichtszustand handelt, und die Ionisationszustände hinter der tatsächlichen Temperatur zurückbleiben, dürfte schwerlich zur Übereinstimmung zwischen Theorie und Experiment führen, denn die Zeitskala des Pinches ist von der Größenordnung msec. Hingegen lehrt Tab. 3, daß die Relaxationszeiten für O_V für $50 < kT < 200$ immer kleiner sind als 0,1 msec*.

Dreierstoßkombinationen können bei diesen Dichten vernachlässigt werden. Aus dem Prinzip des detaillierten Gleichgewichts folgt nämlich unter Benutzung von Gl. (3) und des Rekombinationskoeffizienten Q von ELWERT¹¹

$$Q = \frac{64 f_1}{3 \sqrt{3} \pi} \alpha^4 \pi a_0^2 c \left(\frac{\chi_n}{k T} \right)^{1/2} \sqrt{\frac{\chi_n}{\chi_H}} n_0 G_1 g$$

für das Verhältnis der Zahl der Dreierstoßkombinationen zur Zahl der Photorekombinationen:

$$\frac{(3 \pi)^{3/2}}{4 \cdot 1,4 f} n_e \left(\frac{a_0}{\alpha} \right)^3 \frac{\xi_n u_i}{u_{i+1}} \left(\frac{\chi_H}{\chi_n} \right)^{1/2} \frac{\chi_n}{k T} \frac{G(s, \varphi)}{G_1 g n_0} ;$$

$$G_1 = s e^s \text{Ei}(s) ;$$

u_i ist die Zustandssumme des i -ten Ionisationszustandes. Mit $u_i/u_{i+1} = 10$, $s = 5$, $G(s, \varphi) = 1,5$, $g = 1,5$, $G_1 = 0,5$ und $\chi_n = 50$ eV wird das Verhältnis kleiner als

$$2 \cdot 10^{-16} n_e (\chi_H / \chi_n)^{1/2} = 0,02 \cdot 10^{-16} n_e .$$

¹⁵ P. C. THONEMANN et al., Nature, Lond. **181**, 217 [1958].

* Inzwischen erschien von B. ROSE, E. TAYLOR u. E. WOOD, Nature, Lond. **181**, 1630 [1958] eine Arbeit über das Neutronenspektrum von ZETA, deren Ergebnisse dahingehend interpretiert werden können, daß die Neutronen durch energiereiche D-Ionen, die durch einen Beschleunigungsmechanismus entstanden sind, erzeugt worden sind,

2. Die Strahlung von Verunreinigungen

Während bei reinem Wasserstoffgas bei Temperaturen von einigen $10^6 \text{ }^\circ\text{K}$ nur die Frei – frei-Strahlung eine Rolle spielt, treten bei schwereren Atomen auch andere Strahlungsarten auf, nämlich Rekombinationsstrahlung (Frei – gebunden-Strahlung) und Anregungsstrahlung (Gebunden – gebunden-Strahlung). Es werden die folgenden Annahmen gemacht:

1. Die Dimension des Plasmas sei so klein, daß wegen der geringen Massendichte die optische Dicke gleich Null gesetzt werden kann. Damit fallen alle Wechselwirkungen mit der Strahlung fort.

2. Die Dichte des Plasmas sei so gering, daß alle angeregten Zustände unter Ausstrahlung in den Grundzustand übergehen, bevor ein weiterer Elektronenstoß erfolgt, d. h.

$$\tau \ll 1/Z_A ,$$

wobei τ die mittlere Lebenszeit eines angeregten Zustandes, Z_A die Zahl der anregenden Elektronenstoße auf ein Ion bedeutet. In Vorwegnahme der Gl. (11) folgt hieraus, wenn man geeignete Werte einsetzt ($\chi_n = 60$ eV)

$$\tau \ll 10^9 / n_e .$$

Diese Beziehung ist gewöhnlich bei nicht zu hohen Elektronendichten ($< 10^{16} \text{ cm}^{-3}$) für starke Übergänge gut erfüllt. Gilt die Voraussetzung nicht mehr, so stellt die Rechnung doch eine obere Grenze für die Ausstrahlung dar. Erleidet nämlich ein angeregtes Ion einen Stoß, bevor es seine Energie abstrahlen kann, so kann ein strahlungloser Übergang in ein niedrigeres Niveau, eine noch höhere Anregung oder eine Ionisierung eintreten. Die im Mittel pro Stoß abgestrahlte Energie wird jedoch dann aber kleiner werden.

3. Metastabile Zustände werden wegen ihrer sehr viel längeren Abklingzeiten nicht berücksichtigt.

Ferner wollen wir voraussetzen, daß die Verunreinigungen nur einen kleinen Teil des Gases ausmachen. Dann ist die Strahlung der Verunreinigungen proportional zur Zahl der Fremdatome und zur Elektronendichte, welch letztere allein durch die Zahl

und nicht durch thermonukleare Prozesse. Doch folgt daraus nicht, daß die Ionentemperatur sehr viel niedriger liegt als ursprünglich angegeben (einige $10^6 \text{ }^\circ\text{K}$). Hingegen folgt aus den obigen Überlegungen für die Elektronentemperatur, die für den Ionisationszustand allein entscheidend ist, daß sie in ZETA beträchtlich niedriger als die Ionentemperatur sein sollte.

der Wasserstoffatome bestimmt wird. Die Strahlung des Wasserstoffgases hingegen geht mit dem Quadrat der Elektronendichte, da $n_i = n_e$.

A. Frei-frei-Strahlung

Wir übernehmen den bekannten Ausdruck für die Frei-frei-Strahlung des Wasserstoffs und berücksichtigen die größere Ladung des Ions durch die effektive Kernladungszahl $Z_{\text{eff}} = \sqrt{(\chi_n/\chi_H)} n$: Dann ist die ausgestrahlte Energie pro Atom und pro sec:

$$\frac{W_{\text{ff}}}{n_i} = n_e \frac{64}{3\sqrt{\pi}} Z_{\text{eff}}^2 (\alpha^4 a_0^2 c) \sqrt{\chi_H \cdot k T}$$

Mit der Korrektur von HETTNER⁵ wird $W_{\text{ff}}/n_i = n_e \cdot 1,97 \cdot 10^{-25} \cdot Z_{\text{eff}}^2 \sqrt{k T \text{ (eV)}} \text{ erg} \cdot \text{sec}^{-1}$. (7)

Die Frei-frei-Strahlung der Verunreinigung wird etwas stärker als mit \sqrt{T} ansteigen, da auch Z_{eff} mit der Temperatur wächst bis zu der Temperatur, bei der vorwiegend nur noch der nackte Kern vorhanden ist. Da im Plasma stets mehrere Ionisationszustände vorkommen, muß Gl. (7) über alle Ionisationszustände gemittelt werden.

B. Frei-gebunden-Strahlung

Die Zahl der Einfänge von Elektronen der Energie $E \dots E + dE$ in das tiefste Niveau eines Ions mit der Ionisationsenergie χ_{n_0} und ζ_{n_0} freien Plätzen und unter Aussendung eines Lichtquants $\hbar \omega = E + \chi_{n_0}$ ist, bei MAXWELLScher Energieverteilung der Elektronen, nach ELWERT¹¹ gegeben durch:

$$Z_i = n_e n_{i+1} \frac{32}{3\sqrt{3}\pi} \alpha^4 (\pi a_0^2 c) \frac{\zeta_{n_0}}{n_0} \left(\frac{\chi_{n_0}}{kT} \right)^{3/2} \left(\frac{\chi_{n_0}}{\chi_H} \right)^{1/2} \frac{e^{-E/kT}}{\hbar\omega} dE. \quad (8)$$

Die abgestrahlte Energie erhält man durch Multiplikation mit $\hbar\omega$ und Integration über E :

$$W_{n_0, f-g} = n_e n_{i+1} \frac{32}{3\sqrt{3}\pi} \alpha^4 (\pi a_0^2 c \chi_H) \frac{\zeta_{n_0}}{n_0} \left(\frac{\chi_{n_0}}{kT} \right)^{1/2} \left(\frac{\chi_{n_0}}{\chi_H} \right)^{3/2}. \quad (9)$$

Elektronen werden auch in höhere unbesetzte Schalen eingefangen. Dann ist in Gl. (7) $\zeta = 2n^2$ zu setzen und n_0 durch n zu ersetzen.

Bei einem Einfang wird sofort ausgestrahlt die Energie $E + \chi_n$ und später, wenn das Atom Zeit hat, in den Grundzustand überzugehen, der Betrag $(\chi_{n_0} - \chi_n)$, insgesamt also $(E + \chi_{n_0})$. Die ausgestrahlte Energie durch Einfang in höhere Schalen ergibt sich auf dieselbe Weise durch Multiplikation von Gl. (8) mit $(E + \chi_n) [1 + (\chi_{n_0} - \chi_n)/(E + \chi_n)]$, Integration, und Summation über alle Schalen zu:

$$\sum_{n_0+1}^{\infty} W_{n, f-g} = W_{n_0, f-g} \frac{2 n_0^2}{\zeta_{n_0}} n_0^3 \left[\left(\zeta(3) - \sum_{n=1}^{n_0} \frac{1}{n^3} \right) + \sum_{n_0+1}^{\infty} \frac{1}{n^3} \left(\frac{n^2}{n_0^2} - 1 \right) \frac{\chi_n}{kT} \exp(\chi_n/kT) \text{Ei}(\chi_n/kT) \right].$$

ζ ist die RIEMANNSche Zetafunktion. $\zeta(3) = 1,202$. (Eine Verwechslung mit ζ , der Zahl der Elektronen in der äußeren Schale, ist hier ausgeschlossen.) Die gesamte Ausstrahlung ist sodann gegeben durch

$$W_{f-g} = n_e n_{i+1} \frac{32}{3\sqrt{3}\pi} \alpha^4 (\pi a_0^2 c \chi_H) \frac{\zeta_{n_0}}{n_0} \left(\frac{\chi_{n_0}}{kT} \right)^{1/2} \left(\frac{\chi_{n_0}}{\chi_H} \right)^{3/2} [1 + v' + v''], \quad (10)$$

$$\text{wobei } v' = \frac{2 n_0^2}{\zeta_{n_0}} n_0^3 \left[\zeta(3) - \sum_{n=1}^{n_0} \frac{1}{n^3} \right], \quad v'' = \frac{n_0^2}{\zeta_{n_0}} 2 \left[\sum_{n=n_0+1}^{\infty} \frac{n_0^3}{n^3} \left(1 - \frac{n_0^2}{n^2} \right) \frac{\chi_{n_0}}{kT} e^{\chi_{n_0} n_0^2 / kT} \text{Ei} \left(\frac{\chi_{n_0} n_0^2}{kT} \right) \right];$$

v' berücksichtigt die Einfänge in die höheren Schalen, v'' gibt die Ausstrahlung durch Übergang in den Grundzustand.

Um v'' zu berechnen, zerlegen wir die Summe in zwei Teile

$$v'' = \frac{2 n_0^5 \chi_{n_0}}{\zeta_{n_0} kT} \left[\sum_{n_0+1}^{m-1} \frac{1}{n^3} \left(1 - \frac{1}{n^2} \right) e^{\chi_{n_0} n_0^2 / kT} \text{Ei} \left(\frac{\chi_{n_0} n_0^2}{kT} \right) + \sum_{n=m}^{\infty} \right]$$

und ersetzen die zweite Summe durch ein Integral. Dieses, als Doppelintegral geschrieben, läßt sich leicht berechnen, wenn man zuerst über n integriert.

$$\sum_{n=m}^{\infty} \approx \frac{1}{2 b m^2} \left[\ln \gamma b + e^b \operatorname{Ei}(b) + \left(\frac{\chi_{n_0}}{kT} \right)^{-1} (e^b \operatorname{Ei}(b) (1-b) + \ln \gamma b - b) \right] \quad \text{mit } b = \frac{\chi_{n_0} n_0^2}{kT m^2};$$

γ ist die EULERSche Konstante.

Setzt man $m = n_0 + 1$, so verschwindet die erste Summe und das Integral liefert einen etwas zu kleinen Wert. Für $n_0 = 1$; $\chi_{n_0}/kT = 5$; $m = 10$ ergibt sich z. B. $v'' = 1,43$, und $v' = 0,40$. Man sieht daraus, daß diese Korrekturen sehr wohl berücksichtigt werden müssen.

In Abb. 7 ist die Frei – gebunden-Strahlung für Sauerstoff und Calcium aufgetragen. Sie ist etwa eine Größenordnung größer als die Frei – frei-Strahlung derselben Elemente und nimmt zu, bis der

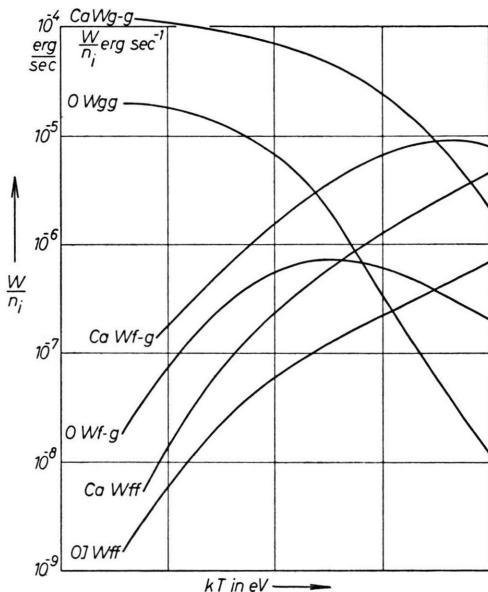


Abb. 7 a. Ausstrahlung der Verunreinigung Sauerstoff und Calcium pro Atom. f-f=Frei-frei, f-g=Frei-gebunden, g-g=Gebunden-gebunden-Strahlung. Elektronendichte $n_e = 10^{15} \text{ cm}^{-3}$.

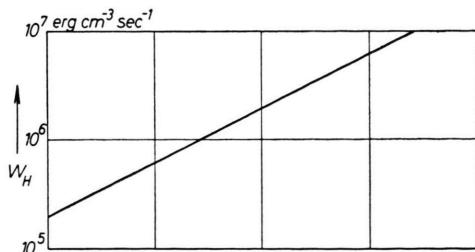


Abb. 7 b. Zum Vergleich mit 7 a: Gesamtstrahlung eines reinen Wasserstoffgases mit $n_e = n_H = 10^{15} \text{ cm}^{-3}$.

Zustand der völligen Ionisation erreicht ist. Da sich dann χ_{n_0} nicht mehr ändert, nimmt sie mit $T^{-1/2}$ wieder ab.

C. Gebunden – gebunden-Strahlung

Am meisten Energie verliert das Plasma durch die Gebunden – gebunden-Strahlung. Einen Überblick über die experimentellen Daten und theoretischen Berechnungen des Anregungsquerschnitts für Elektronenstoß, der bei der Gebunden – gebunden-Strahlung wesentlich eingeht, gibt MASSEY¹⁷. THIEME¹⁸ führte ausgedehnte Messungen an He durch. Die Form der optischen Anregungsfunktion läßt sich befriedigend durch $B \ln U_A / (U_A + \varphi)$ wiedergeben. U_A ist hierbei die Energie des stoßenden Elektrons bezogen auf die Anregungsenergie des betreffenden Übergangs. Die Maxima der Querschnitte liegen, verglichen mit den Ionisationsquerschnitten, näher bei $U_A = 1$, weshalb φ negativ wird. Zu beachten ist, daß die optische Anregungsfunktion nicht den Wirkungsquerschnitt, sondern die Größe $Q_{ij} = N_i A_{ij} / v n_e N$ darstellt (N_i = Zahl der Atome im i -ten Anregungszustand, A_{ij} = optische Übergangswahrscheinlichkeit, N = Zahl der Gasatome pro cm^3 , n_e und v = Dichte und Geschwindigkeit des Elektronenstroms).

Da hauptsächlich Übergänge zwischen höheren Termen (z. B. $2^1\text{S} - 3^1\text{P}$) gemessen wurden, verschwinden die Anregungsfunktionen schon bei ca. 20 Volt, der Anregungsenergie für den 2^1S -Term, da für kleinere Energien dieser überhaupt nicht mehr besetzt ist. Wie man leicht sieht, ist bei kleinen Energien bei konstantem Elektronenstrom die Anregungsfunktion dem Produkt der Wirkungsquerschnitte, etwa dem $(1^1\text{S} - 3^1\text{P})$ - und $(3^1\text{P} - 2^1\text{S})$ -Übergang proportional. Erst bei höheren Energien wird sie dem Wirkungsquerschnitt für den höheren $(3^1\text{P} - 2^1\text{S})$ -Übergang allein proportional. Der Ordinatenmaßstab scheint bei allen Messungen recht unsicher zu sein. Aus diesen Gründen ist die Ver-

¹⁷ H. S. W. MASSEY, Handbuch der Phys. 1956, Bd. XXXVI.

¹⁸ O. THIEME, Z. Phys. 78, 412 [1932].

wertbarkeit der experimentellen Ergebnisse für unseren Zweck ziemlich gering.

Die Anregungsquerschnitte für Wasserstoff sind von MASSEY und MOHR¹⁹ nach der BORNschen Näherung berechnet worden. Auch hier lassen sich Ergebnisse durch die Interpolationsformel (2) gut wiedergeben. ELWERT²⁰ leitet einen Anregungsquerschnitt ab:

$$\varphi_{n_0 l_0}^{n l} = 2 f_3 \varphi_{n_0 l_0}^{n l} \frac{1}{1 - (n_0^2/n^2)} \frac{1}{U_A} \ln \frac{1 + \sqrt{1 - (1/U_A)}}{1 - \sqrt{1 - (1/U_A)}}, \quad (11)$$

der zur Mittelung über die MAXWELL-Verteilung durch eine Interpolationsformel ersetzt wird. (11) hat die asymptotische Gestalt $(\ln 4 U_A)/U_A$ und lässt sich gut durch (2) annähern. Die Tab. 4 gibt einen Überblick über einige Anregungsquerschnitte und die Werte der Interpolationsparameter B und φ .

	Element	Übergang	B	φ	Maximum $v. q_{\text{red.}}$	$\frac{q_{\text{red. Max}}}{2 \varphi_{n_0 l_0}^{n l} (1 - n_0^2/n^2)}$
theor.	H	1s-2p	0,304	-0,4	1,31	0,89
theor.	H	1s-3p	0,483	-0,9	0,3	1,5
theor.	H	1s-4p				1,63
exp.	He	2s-3p	0,29	0	0,1	—
ELWERTSche Formel			3,58	-0,8	0,9	0,9

Tab. 4. Parameterwerte B und φ einiger Anregungsquerschnitte. In der Spalte 6 sind die ungefähren Maxima eingetragen, in der letzten Spalte sind diese durch $2 \varphi_{n_0 l_0}^{n l} (1 - n_0^2/n^2)$ geteilt, um zu sehen, inwieweit das Maximum der ELWERTSchen Formel mit den anderen Maxima übereinstimmt.

Für die folgenden Rechnungen wählen wir

$$q_{\text{red.}} = B \frac{\ln U_A}{U_A + \varphi} \quad \text{mit} \quad \varphi = -1 \quad \text{und} \quad B = \frac{2 \sum_l \varphi_{n_0 l_0}^{n l}}{1 - (n_0^2/n^2)} 0,9.$$

Dann sind die Maxima von (11) und (2) gleich groß.

Wir führen dieselbe Rechnung durch wie bei der Berechnung der Zahl der Ionisationen und erhalten die Zahl der Anregungen pro Sekunde:

$$Z_A = n_i n_e (\pi \alpha a_0^2 c) \zeta 0,9 \frac{2}{\sqrt{\pi}} \frac{\varphi_{n_0 l_0}^{n l}}{\sqrt{1 - (n_0^2/n^2)}} \left(\frac{\chi_H}{\chi_{n_0}} \right)^{1/2} \exp(-s_A) G(s_A, \varphi) \quad (12)$$

und die ausgestrahlte Energie pro Atom

$$\frac{1}{n_i} W_{g-g} = n_e (\pi \alpha a_0^2 c) \zeta \chi_H \left(\frac{\chi_H}{\chi_{n_0}} \right)^{1/2} \sqrt{1 - \frac{n_0^2}{n^2}} \frac{2 \cdot 0,9}{\sqrt{\pi}} \varphi_{n_0 l_0}^{n l} \exp(-s_A) G(s_A, \varphi) \quad (13)$$

$$\text{mit } s_A = \frac{\chi_A}{kT} = \left(1 - \frac{n_0^2}{n^2} \right) \frac{\chi_{n_0}}{kT}.$$

$G(s_A, \varphi)$ ist definiert wie oben, doch lässt sich für $\varphi < 0$ die Integration nicht mehr in derselben Weise durchführen wie für $\varphi > 0$ und man erhält ($\varphi < 0$):

$$G(s_A, \varphi) = 2 s_A^{1/2} \exp(s_A) \text{Ei}(s_A) + 2 |\varphi| s_A^{1/2} \left\{ \ln |\varphi| \text{Ei}(s(1 - |\varphi|)) + \frac{1}{2} [\text{Ei}(|\varphi| s)]^2 \right. \\ \left. + \int_{\frac{1-|\varphi|}{2|\varphi|}}^1 \frac{1}{t} \ln(2t+1) e^{-2|\varphi|st} dt + \int_1^\infty \frac{1}{t} \ln \frac{2t+1}{2t-1} e^{-2|\varphi|st} dt \right\}.$$

¹⁹ H. S. W. MASSEY u. C. B. O. MOHR, Proc. Roy. Soc., Lond. A **132**, 605 [1931].

²⁰ G. ELWERT, Z. Naturforsch. **9a**, 637 [1954].

Die logarithmischen Terme in den Integralen lassen sich durch geschlossen integrierbare Terme ersetzen, so daß man die in Abb. 3 für $\varphi = -1$ eingezzeichnete Funktion erhält.

Um die gesamte Ausstrahlung zu erhalten, muß über alle Anregungsstufen eines Ionisationszustandes und über alle Ionisationszustände summiert werden. Nun ist aber die Anregungswahrscheinlichkeit für die nächsthöhere Schale sehr viel größer als für noch höhere Niveaus und deshalb wurde nur die erstere berücksichtigt. Die Summierung über die Ionisationszustände erleichtert man sich dadurch, daß man Temperaturen wählt, für die $n_i = n_{i+1}$. Dann kann man wegen der geringen Konzentration alle anderen Zustände vernachlässigen. Überdies stellt sich heraus, daß die Strahlung des $(i+1)$ -ten Zustandes nur ein Bruchteil des i -ten beträgt. Der Verlauf der Gebunden – gebunden-Strahlung ist in Abb. 7 für Sauerstoff und Calcium zu sehen. Sie ist um Größenordnungen größer als die entsprechende Frei – frei-Strahlung und nimmt mit steigender Temperatur etwas ab. Ist die Temperatur so groß, daß die Atome zumeist von allen Elektronen entblößt sind, so folgt, wenn man Gl. (6) auf diesen Fall spezialisiert, ($g = 1,4$)

$$\frac{n_{z-1}}{n_z} = 1,68 \cdot 10^{-6} Z^4 s^{3/2} e^{2s} \frac{Ei(s)}{G(s, 1)}. \quad (14)$$

Die Strahlung pro Atom für Temperaturen, für die fast alle Kerne vollständig ionisiert sind, ergibt sich, wenn man Gl. (13) und Gl. (14) multipliziert.

In Abb. 7 sind die Strahlungsleistungen pro Atom der Frei – frei-, Frei – gebunden- und Gebunden – gebunden-Strahlung für Sauerstoff ($Z = 8$) und Calcium ($Z = 20$) aufgetragen. Die Intensität erstreckt sich über 5 Größenordnungen. Die Frei – frei-Strahlung nimmt bei 10^5 °K etwa mit $T^{3/2}$ zu – wegen

der Temperaturabhängigkeit von Z_{eff} , um dann bei der Temperatur der vollständigen Ionisation (bei Sauerstoff ca. 300 eV, bei Ca ca. 5000 eV) in das $T^{1/2}$ -Gesetz überzugehen. In diesem Bereich verhalten sich die ausgestrahlten Energien wie Z^2 .

Etwa eine Größenordnung über der Frei – frei-Strahlung liegt die Frei – gebunden-Strahlung. Sie verläuft anfangs mit ähnlicher Steigung wie die Frei – frei-Strahlung, erreicht bei der Temperatur der vollständigen Ionisation ein Maximum und verhält sich bei noch höheren Temperaturen wie $Z^4 (kT)^{-1/2}$. Den größten Beitrag liefert die Gebunden – gebunden-Strahlung, die bis zur Temperatur der vollständigen Ionisation wenig, dann immer mehr abnimmt. Bei sehr hohen Temperaturen verläuft sie wie $Z^6 (kT)^{-3/2} \ln(kT/Z^2)$.

Mit Hilfe der Abb. 7 erhält man nun leicht einen Überblick über die zusätzliche Strahlung, die bei einer gegebenen Verunreinigung zu erwarten ist. Es braucht praktisch nur die Liniенstrahlung berücksichtigt zu werden. Wir nehmen z. B. an, daß auf 10^4 Wasserstoffatome ein Ca-Atom komme. Bei 10^6 °K beträgt dann die Strahlung des Wasserstoffs bei einer Elektronendichte von 10^{15} cm $^{-3}$ etwa 10^6 erg cm $^{-3}$ sec $^{-1}$, die der Calciumverunreinigung (nach Abb. 7) $7 \cdot 10^7$ erg cm $^{-3}$ sec $^{-1}$, tatsächlich aber etwas mehr, da bei der Berechnung der Kurve nur ein Anregungsniveau berücksichtigt wurde. Die Strahlung der Verunreinigung beträgt also bei dieser geringen Konzentration schon rund das hundertfache der Strahlung des reinen Gases, ähnlich den Verhältnissen in der Korona. Mit steigender Temperatur wird, wie man sieht, das Verhältnis ein wenig günstiger.

Herrn Prof. L. BIERMANN möchte ich für wertvolle Anregungen und zahlreiche Diskussionen sehr herzlich danken.